

МОДЕЛИРОВАНИЕ НЕЛИНЕЙНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК ЭЛЕКТРОТЕХНИЧЕСКИХ УСТРОЙСТВ В ЗАДАЧАХ ПО УПРЕЖДЕНИЮ ОТКАЗОВ

А.Лисов, Т.Чернова, М.Горбунов

УДК 519.654:519.657
ВАК 05.27.00

Попытки разработать строгие математические описания нелинейных элементов и процессов в практике проектирования, исследования и эксплуатации электротехнических устройств привели к получению сложных, громоздких программных комплексов, ориентированных на анализ и синтез конкретных устройств с конкретными параметрами [1]. Для моделирования некоторых нелинейных характеристик рекомендуют использовать эмпирические зависимости, только качественно не противоречивые; для других случаев широко используют приемы линеаризации, что ведет к загромождению результата. В настоящей статье предлагается достаточно компактный в реализации обобщенный алгоритм для моделирования нелинейных процессов с заданной точностью.

Существующие программные комплексы трудоемки в эксплуатации и предназначены для использования только высоко квалифицированными специалистами – программистами, электротехниками, электромеханиками. Разработка математической модели нелинейных процессов различного характера на основе единого подхода, достаточно компактной в реализации и обеспечивающей заданную количественную точность, является очень актуальной.

Все нелинейные элементы (НЭ) подразделяют на электрические и магнитные. В настоящей работе рассматриваются электрические НЭ, причем для которых как в неуправляемых, так и в управляемых элементах наблюдаются процессы с насыщением, имеющие ВАХ определенного вида [2]. В качестве примера неуправляемых НЭ можно привести бареттер, вакуумный диод, а управляемых – биполярный и полевой транзисторы.

Оптимальным для практики проектирования и эксплуатации электротехнических устройств является метод наименьших квадратов (МНК). К его достоинствам относятся: обеспечение требуемой точности для моделирования очень широкого класса функций, простота

реализации, относительная независимость от количества точек исходных функций (чем больше точек, тем предпочтительнее), возможность уточнения модели объекта в процессе эксплуатации с учетом новых данных и, таким образом, уточнения прогноза на последующую эксплуатацию [3].

Анализ особенностей нелинейных характеристик наиболее распространенных элементов, ВАХ которых соответствует процессам с насыщением, позволяет выделить два наиболее характерных типа уравнений, которые используются для описания этих характеристик: дробно-рациональные, имеющие вид:

$$f_1(x) = \frac{x}{ax+b} \text{ или } f_1(x) = \frac{ax}{bx+c},$$

а также степенные функции:

$$f_2(x) = ax^b.$$

При $|b| < 1$ степенные функции подходят для моделирования процессов с насыщением – ВАХ нелинейных резистивных элементов (в частности, бареттера).

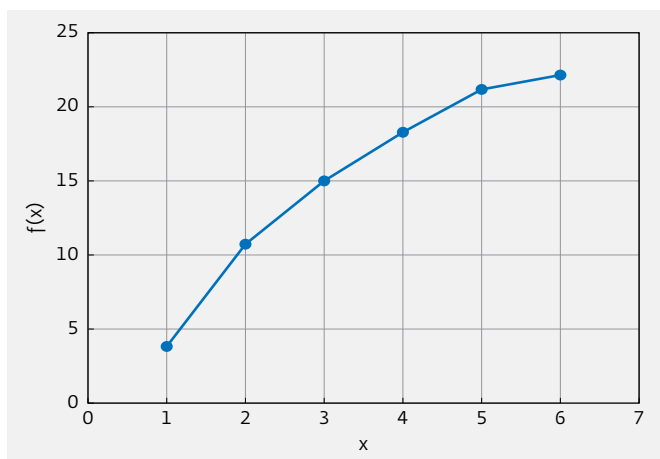


Рис.1. Качественный характер зависимости с насыщением

Для исследования качественного характера поведения ВАХ таких нелинейных элементов приведена таблица значений, отражающая закономерность процессов с насыщением (табл.1). Числовые значения в таблице приведены в качестве примера. Формализованная постановка задачи сводится к подбору вида аналитической зависимости $y=f(x)$, приближающей график (рис.1).

Для моделирования таких процессов ограничимся двумя параметрами в уравнениях. Определим

Таблица 1. Экспериментально полученные координаты

x_i	0,5	1	4	8	12
y_i	5,3	6,1	13,7	17,5	18,9

параметры a и b методом наименьших квадратов (МНК), согласно этому методу наилучшими параметрами a и b считают те, для которых сумма квадратов отклонений минимальна:

$$\sum_{i=1}^n [y_i - f(x_i, a, b)]^2 = \min.$$

Здесь n – число точек табличной функции (см. табл.1).

Необходимо найти частные производные от этой суммы по параметрам a и b и решить уравнения:

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial a} \left[\sum_{i=1}^n [y_i - f(x_i, a, b)]^2 \right] = -2 \sum_{i=1}^n [y_i - f(x_i, a, b)] f'_a(x_i, a, b) = 0, \\ \frac{\partial}{\partial b} \left[\sum_{i=1}^n [y_i - f(x_i, a, b)]^2 \right] = -2 \sum_{i=1}^n [y_i - f(x_i, a, b)] f'_b(x_i, a, b) = 0. \end{cases}$$

Таблица 2. Исходные данные для построения дробно-линейной функции

x_i	x_i^2	x_i^3	y_i	$x_i y_i$	$x_i^2 y_i$	$x_i^3 y_i$	$f_1(x_i)$	δ_{ii}	δ_{ii}^2
0,5	0,25	0,125	5,3	2,65	1,325	0,6625	3,7224	1,5776	2,4888
1	1	1	6,1	6,1	6,1	6,1	6,4082	0,3082	0,0950
4	16	64	13,7	54,8	219,2	876,8	13,9653	0,2653	0,0704
8	64	512	17,5	140	1120	8960	17,3817	0,1183	0,0140
12	144	1728	18,9	226,8	2721,6	32659,2	18,9249	0,0249	0,0006
	S_2	S_3		T_1	T_2	T_3			
	225,25	2305,13		430,35	4068,23	42502,76			

I. Рассмотрим дробно-линейную аппроксимирующую

$$f_1(x) = \frac{x}{0,0435x + 0,1126}.$$

функцию $f_1(x) = \frac{x}{ax+b}$. Для нее система имеет вид:

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^n \left(y_i - \frac{x_i}{ax_i+b} \right) \frac{x_i^2}{(ax_i+b)^2} = 0, \\ \sum_{i=1}^n \left(y_i - \frac{x_i}{ax_i+b} \right) \frac{x_i}{(ax_i+b)^2} = 0. \end{cases}$$

Далее система уравнений преобразуется к виду:

$$\begin{cases} a \sum_{i=1}^n x_i^2 y_i + b \sum_{i=1}^n x_i y_i = \sum_{i=1}^n x_i^2, \\ a \sum_{i=1}^n x_i^3 y_i + b \sum_{i=1}^n x_i^2 y_i = \sum_{i=1}^n x_i^3. \end{cases}$$

Если ввести следующие обозначения:

$$\sum_{i=1}^n x_i^2 = S_2; \quad \sum_{i=1}^n x_i^3 = S_3; \quad \sum_{i=1}^n x_i y_i = T_1; \quad \sum_{i=1}^n x_i^2 y_i = T_2; \quad \sum_{i=1}^n x_i^3 y_i = T_3,$$

то систему можно записать в нормальном виде по МНК:

$$\begin{cases} T_2 a + T_1 b = S_2, \\ T_3 a + T_2 b = S_3. \end{cases}$$

Для вычисления коэффициентов нормальной системы нужно составить таблицу (см. табл.2), причем последние три столбца таблицы – расчетные значения $f_1(x_i)$, отклонения δ_{ii} и квадраты отклонений δ_{ii}^2 – заполняются только после решения системы.

С найденными числовыми коэффициентами система уравнений имеет вид:

$$\begin{cases} 4068,23a + 430,35b = 225,25, \\ 42502,76a + 4068,23b = 2305,13. \end{cases}$$

Решение этой системы позволяет определить значения параметров: $a=0,0435$; $b=0,1126$. Тогда искомая функция $f_1(x)$ будет представлена в виде:

Для анализа полученной функции $f_1(x)$ при установленных для нее значениях аргумента вычисляем отклонения

$\delta_{ii} = |f_1(x_i) - y_i|$ и дисперсию $D_1 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \delta_{ii}^2$. Тогда среднеквадратическое отклонение (СКО): $\sigma_1 = \sqrt{D_1} = 0,7306$.

II. Выполним анализ для степенной аппроксимирующей функции $f_2(x) = ax^b$. Для нее система уравнений имеет вид:

Система нелинейна относительно неизвестных a и b . Ее решение в полученной форме невозможно. Здесь целесообразно логарифмирование функции $f_2(x)$: $y = ax^b$; $\ln y = \ln a + b \ln x$.

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^n [y_i - ax^b] x_i^b = 0, \\ \sum_{i=1}^n [y_i - ax^b] ax^b \ln x_i = 0. \end{cases}$$

Обозначив $z = \ln y$; $A = \ln a$; $p = \ln x$, можно записать: $z = A + bp$. Частные производные по A и b равны $\frac{\partial z}{\partial A} = 1$; $\frac{\partial z}{\partial b} = p$.

Теперь систему уравнений можно записать в виде:

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^n [z_i - (A + bp_i)] = 0, \\ \sum_{i=1}^n [z_i - (A + bp_i)] p_i = 0. \end{cases}$$

Систему уравнений несложно преобразовать к виду:

$$\begin{cases} nA + b \sum_{i=1}^n p_i = \sum_{i=1}^n z_i, \\ A \sum_{i=1}^n p_i + b \sum_{i=1}^n p_i^2 = \sum_{i=1}^n z_i p_i. \end{cases}$$

Систему уравнений несложно преобразовать к виду:

$$\begin{cases} nA + b \sum_{i=1}^n p_i = \sum_{i=1}^n z_i, \\ A \sum_{i=1}^n p_i + b \sum_{i=1}^n p_i^2 = \sum_{i=1}^n z_i p_i. \end{cases}$$

Таблица 3. Исходные данные для построения степенной функции

x_i	$p_i = \ln x_i$	p_i^2	y_i	$z_i = \ln y_i$	$z_i p_i$	$f_2(x_i)$	δ_{2i}	δ_{2i}^2
0,5	-0,6931	0,4805	5,3	1,6677	-1,1560	5,4399	0,1399	0,0196
4	1,3863	1,9218	13,7	2,6174	3,6285	12,8234	0,8766	0,7684
8	2,0794	4,3241	17,5	2,8622	5,9518	17,0664	0,4336	0,1880
12	2,4849	6,1748	18,9	2,9392	7,3035	20,1724	1,2724	1,6190
	S_1	S_2		T_0	T_1			
	5,2575	12,9011		10,0865	15,7278			

Если ввести следующие обозначения: $\sum_{i=1}^n p_i = S_1$; $\sum_{i=1}^n p_i^2 = S_2$;
 $\sum_{i=1}^n z_i = T_0$; $\sum_{i=1}^n z_i p_i = T_1$, то система уравнений будет представ-
лена в виде:

$$\begin{cases} nA + S_1 b = T_0, \\ S_1 A + S_2 b = T_1. \end{cases}$$

Для вычисления коэффициентов системы нужно составить таблицу (табл.3), причем последние три столбца таблицы – расчетные значения $f_2(x)$, отклонения δ_{2i} и квадраты отклонений δ_{2i}^2 – заполняются после решения системы.

С числовыми коэффициентами систему уравнений запишем в виде ($n=4$):

$$\begin{cases} 4A + 5,2574b = 10,0865, \\ 5,2574A + 12,9011b = 15,7278. \end{cases}$$

Решение системы позволяет определить значения параметров $A=1,9796$; $b=0,4124$, откуда $a=e^A=7,2399$. Тогда иско-
мую функцию $f_2(x)$ можно записать в виде:

$$f_2(x) = 7,2399 x^{0,4124}.$$

Для анализа полученной функции при установленных для нее значениях аргумента вычислим отклонения

$$\delta_{2i} = |f_2(x_i) - y_i| \text{ и дисперсию } D_2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \delta_{2i}^2. \text{ Тогда среднеква-}$$

дратическое отклонение (СКО): $\sigma_2 = \sqrt{D_2} = 0,8054$. Очевидно, в рассмотренных в настоящей статье задачах аппроксимации по методу наименьших квадратов, погрешности, обеспечиваемые дробно-рациональной функцией $f_1(x)$, и степенной функцией $f_2(x)$ сравнимы по точности. Однако в каждом конкретном случае решение о применении той или иной зависимости следует принимать индивидуально на основе сравнительного анализа результатов аппроксимации.

Следует также заметить, что для моделирования процессов с насыщением с горизонтальными асимптотами подходят также показательные (здесь – экспоненциальные) функции вида:

$$f_3(x) = a(1 - e^{-bx}) \text{ или } f_3(x) = C - ae^{-bx}.$$

В ряде случаев, как следует из опыта, такие функции имеют преимущество в моделировании ВАХ, показывая большую точность приближения при сокращении алгоритмов и вычислительных операций по сравнению с функциями $f_1(x)$ и $f_2(x)$.

Таким образом, разработан обобщенный алгоритм решения задач аппроксимации процессов с насыщением различными аналитическими функциями. Для широкой номенклатуры нелинейных элементов электротехнических устройств их экспресс-диагностикой может служить анализ кривой ВАХ. Получив экспериментальные данные кривой, в каждом плановом контроле для нее можно установить исследуемую закономерность, анализируя значение СКО. Это позволит на основе достаточной статистики эксплуатации рассматриваемых устройств судить об их техническом состоянии и о продолжительности их последующей эксплуатации, а также прогнозировать критический предел функционирования и остаточное время жизни устройства [4].

ЛИТЕРАТУРА

1. **Гольдберг О.Д.** Испытания электрических машин. Учебное пособие. – М.: Высшая школа, 2000. 255 с.: ил.
2. **Бессонов Л.А.** Теоретические основы электротехники. Электрические цепи. Учебник. 10-е изд. – М.: Гардарики, 2002. 638 с.
3. **Демидович Б.П., Марон И.А., Шувалова Э.З.** Численные методы анализа. Приближение функций, дифференциальные и интегральные уравнения. – СПб: Лань, 2010. 400 с.
4. **Чернова Т.А., Лисов А.А., Кубрин П.В.** Получение консолидированной информации о состоянии контролируемых объектов по совокупности их характеристических параметров // Научное издание. 2015. № 6. Т. 16. 16–19 с.