

Оценка погрешностей разности коррелированных навигационных измерений

А. Черненко¹

УДК 656.052.1 ВАК 2.2.10

От правильной интерпретации результатов навигационных измерений, полученных с помощью спутниковых навигационных систем, РЛС или других средств измерений, зависит точность определения различных навигационных параметров, например расстояний и пеленгов в морской навигации. В статье предложена формула для оценки погрешностей разности коррелированных измерений навигационных параметров, которая позволяет повысить эффективность решения навигационных задач; приведены результаты ее экспериментальной проверки.

При решении практических навигационных задач часто вычисляется разность двух однородных измерений навигационных параметров. Здесь и далее под однородными измерениями навигационных параметров понимаются измерения, погрешности которых являются выборкой из одного и того же случайного процесса. Не рассматривая процедур определения однородности навигационных измерений, которые достаточно сложны, отметим, что это, как правило, измерения, выполненные одним и тем же прибором. При участии в процессе измерения человека (измерение пеленгов, дистанций с помощью РЛС и т. п.), кроме того, их должен выполнять один и тот же наблюдатель. К однородным навигационным измерениям, при соблюдении определенных условий, можно также отнести измерения широты и долготы современными приемниками спутниковых навигационных систем.

Два однородных измерения, выполненные через небольшой промежуток времени, обычно взаимно коррелированы. Пренебрежение этим фактом может привести к неверной оценке погрешности определения приращения навигационного параметра (разности измерений) и, соответственно, к неэффективному решению навигационной задачи.

Получим формулу для вычисления дисперсии разности двух однородных измерений, приняв условия, оговоренные выше, и представив измеренный навигационный параметр X в виде суммы его истинного значения $X_{и}$ и гармонических составляющих погрешности,

каждая из которых имеет свой случайный фазовый сдвиг ξ [1]:

$$X(t) = X_{и}(t) + \int_0^{\infty} K(\omega) \cos(\omega t + \xi_{\omega}) d\omega, \quad (1)$$

где $X(t)$ – измеренное в момент времени t значение навигационного параметра; $X_{и}(t)$ – истинное значение измеряемого параметра в момент времени t ; $K(\omega)$ – амплитуда гармоники погрешности с угловой частотой ω ; ξ_{ω} – случайный фазовый сдвиг гармоники погрешности с угловой частотой ω .

С учетом формулы (1) приращение величины навигационного параметра $\Delta X(\Delta t)$ за интервал времени Δt запишется в виде:

$$\Delta X(\Delta t) = \Delta X_{и}(\Delta t) + \int_0^{\infty} K(\omega) \cdot [\cos(\omega t + \xi_{\omega} + \omega \Delta t) - \cos(\omega t + \xi_{\omega})] d\omega. \quad (2)$$

Рассмотрим составляющую погрешности, вносимую в $\Delta X(\Delta t)$ произвольной гармонической составляющей исходных измерений, $E(\omega, \Delta t)$:

$$E(\omega, \Delta t) = K(\omega) \cdot [\cos(\omega t + \xi_{\omega} + \omega \Delta t) - \cos(\omega t + \xi_{\omega})]. \quad (3)$$

В рассматриваемом случае периодические множители в формуле (3) удобно выразить через произведение синусов полусуммы и полуразности аргументов [2]:

$$E(\omega, \Delta t) = 2K(\omega) \cdot \sin(0,5 \cdot \omega \Delta t) \cdot \sin(\omega t + \xi_{\omega} + 0,5 \cdot \omega \Delta t). \quad (4)$$

Величина ξ_{ω} – равномерно распределенная на интервале $0 \dots 2\pi$ случайная величина [3], поэтому ее можно представить следующим образом: $\xi_{\omega} = \xi_{\omega} \pm 90^{\circ} - \omega \Delta t$. По-

¹ АО «НИИМА «Прогресс», руководитель проекта.

сле подстановки этого выражения в формулу (4) получаем:

$$E(\omega, \Delta t) = \sin(0,5 \cdot \omega \Delta t) \cdot 2K(\omega) \cdot \cos(\omega t + \zeta_\omega).$$

Тогда амплитуда гармоники погрешности разности измерений $K'(\omega)$ связана с амплитудой гармоники погрешности исходных измерений $K(\omega)$ соотношением:

$$K'(\omega) = 2K(\omega) \cdot \sin(0,5 \cdot \omega \Delta t). \quad (5)$$

По определению спектральной плотности случайного процесса [4] выражение (5) равносильно тому, что спектральная плотность погрешностей разности измерений Φ_{Π} связана со спектральной плотностью погрешностей исходных измерений Φ_{xx} следующим соотношением:

$$\Phi_{\Pi}(\omega) = 4 \sin^2(0,5 \cdot \omega \Delta t) \cdot \Phi_{xx}(\omega). \quad (6)$$

Используя (6) и взаимосвязь спектральной плотности случайного процесса с автокорреляционной функцией, получим автокорреляционную функцию погрешностей разности однородных измерений $R_{\Pi}(t)$:

$$\begin{aligned} R_{\Pi}(t) &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \cos(\omega t) \cdot \Phi_{\Pi}(\omega) \cdot d\omega = \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} 4 \sin^2(0,5 \omega \Delta t) \cdot \cos(\omega t) \cdot \Phi_{xx}(\omega) \cdot d\omega. \end{aligned} \quad (7)$$

Так как $\cos(2A) = 1 - 2\sin^2(A)$ или $2\sin^2(A) = 1 - \cos(2A)$ [2], то, заменив $2\sin^2(0,5\omega\Delta t)$ на $1 - \cos(\omega\Delta t)$, получаем:

$$R_{\Pi}(t) = 2 \cdot \left(\frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \cos(\omega t) \Phi_{xx}(\omega) d\omega - \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \cos(\omega t) \cos(\omega \Delta t) \Phi_{xx}(\omega) d\omega \right). \quad (8)$$

Учитывая, что при $t=0$ $D_{xx} = R_{xx}(t=0)$ и $\cos(0) = 1$ [4], получаем искомую формулу для вычисления дисперсии разности двух однородных коррелированных измерений:

$$R_{\Pi}(0) = D_{\Pi} = 2 \left(D_{xx} - \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \cos(\omega \Delta t) \Phi_{xx}(\omega) d\omega \right) = 2D_{xx} \cdot [1 - \rho_{xx}(\Delta t)], \quad (9)$$

где D_{xx} – дисперсия исходных измерений; D_{Π} – дисперсия разности измерений; ρ_{xx} – нормированная автокорреляционная функция исходных измерений; Δt – интервал времени между измерениями.

Формула (9) может показаться хорошо известной. Во многих публикациях по математике и теории вероятностей [1], а также в ПГС-35 в разделе с описанием вычислений нуля глубин по связи соответственных высот

приведена формула оценки остаточной погрешности линейной регрессии:

$$D'_y = D_y (1 - r_{xy}^2), \quad (10)$$

где D'_y – дисперсия оценки значения случайной величины Y , определенной по уравнению линейной регрессии случайных величин $Y = A_0 + A_1 X$; D_y – дисперсия величины Y ; r_{xy} – коэффициент корреляции величин X и Y .

Но зависимость (9) относится к совершенно иной операции со случайными коррелированными величинами. Регрессионный анализ и формула (10) применяются тогда, когда по значениям одной случайной величины ищут значения другой случайной величины. Формула (9) предназначена для оценки дисперсии разности двух однородных измерений (разности двух значений одного случайного процесса, отстоящих друг от друга на интервал времени Δt).

Нельзя формулу (9) применить и к оценке так называемых дифференциальных измерений. Дифференциальные измерения одновременны, то есть $\Delta t = 0$, в этом случае формула (9) дает нереальный результат $D_{\Pi} = 0!$. Для дифференциальных измерений это не верно. Но, по условиям, оговоренным ранее, для измерений, принадлежащих одной реализации случайного процесса, при $\Delta t = 0$ вычисляемая разность тождественно равна нулю и не имеет дисперсии, то есть не является случайной величиной.

Для проверки достоверности формулы (9) были выполнены наблюдения на приемнике спутниковых навигационных систем GPS Garmin GPS76 (СКП=10...25 м), установленном на геодезическом пункте. В этом случае истинное приращение навигационного параметра (координаты) известно и равно нулю. Все величины, входящие в формулу (9), можно рассчитать по хорошо известным формулам:

$$M_{xx} \approx M_x = \frac{1}{n} \cdot \sum_{k=1}^n x_k, \quad x'_k = x_k - M_x, \quad D_{xx} \approx S_x = \frac{1}{n} \cdot \sum_{k=1}^n x_k'^2, \quad (11)$$

$$\rho_{xx}(\Delta t) \approx r_x(m) = \frac{1}{n_m} \cdot \sum_{k=1}^{n_m} x_{k+m}' \cdot x_k', \quad \Delta t = \Delta t_{\min} \cdot m, \quad (12)$$

$$\Delta X(\Delta t) = \Delta X(m) = x_{k+m} - x_k, \quad M_{\Delta X}(m) = \frac{1}{l_m} \cdot \sum_{i=1}^{l_m} \Delta X_i(m), \quad (13)$$

$$\Delta X'_i(m) = \Delta X_i(m) - M_{\Delta X}(m), \quad S_{\Delta X}(m) = \frac{1}{l_m} \cdot \sum_{i=1}^{l_m} (\Delta X'_i(m))^2, \quad (14)$$

где M_x – статистическая оценка математического ожидания параметра X ; S_x – статистическая оценка дисперсии параметра X ; n, m, k, l, i – целые положительные числа (индексы); Δt_{\min} – минимальный интервал времени между измерениями; x – измеренное значение параметра X ; x' – центрированное значение измерения параметра X ;

$\Delta X(m)$ – приращение параметра X за интервал времени $\Delta t = \Delta t_{\min} m$; $\Delta X'(m)$ – центрированное приращение параметра X за интервал времени Δt ; $M_{\Delta X}(m)$ – статистическая оценка математического ожидания приращения параметра X за интервал времени Δt ; $S_{\Delta X}(m)$ – статистическая оценка дисперсии приращения параметра X за интервал времени Δt .

Для обеспечения однородности измерений они были подвергнуты следующей предварительной обработке:

- из всей совокупности измерений были выбраны непрерывные последовательности с одинаковым числом спутников, использованных для определения места (10 спутников);
- эти последовательности были разбиты на группы длительностью 30 с;
- из 30-секундных групп составлены непрерывные по времени блоки измерений, в которые по критерию Фишера на уровне доверия 5% вошли группы, имеющие одинаковые дисперсии и математические ожидания.

Для выбранных блоков наблюдений были выполнены расчеты по формулам (11–14) и рассчитаны оценки дисперсий по формуле (9). Для вычисления оценок по формуле (9) необходимо знать автокорреляционные функции погрешностей исходных измерений. Применение аппроксимаций этих функций внесло бы в результаты проверки дополнительные погрешности, поэтому для вычислений по формуле (9) были использованы значения этих функций, вычисленные по формулам (11–14).

На рис. 1 приведены относительные разности экспериментальных и теоретических оценок ($Ddx = \delta_{dx}$, $Ddy = \delta_{dy}$), вычисленные по формуле:

$$\delta_{d^*} = (D'_{d^*} - D_{d^*}) / D_{d^*}, \quad (15)$$

где δ_{d^*} – относительная разность оценок; D'_{d^*} – оценки дисперсии, вычисленные по формуле (9); D_{d^*} – оценки дисперсии, определенные обычным способом, формулы (11–14).

Как видим, в рассматриваемом интервале времени разность между экспериментальными и теоретическими оценками не превышает 12%. Таким образом, эксперимент подтверждает достоверность формулы (9).

Рассмотрим возможные практические применения полученной теоретической зависимости, для чего подробнее определим область ее применения, а именно, морские средства навигации, для которых она может быть применена, и круг задач, решение которых можно сделать более эффективными. В соответствии с Приложением 2 МВР-96 существенная корреляция присуща следующим измерениям:

- расстояний (РНС ГРАС, РЛС, донные маяки-ответчики);

- разностей расстояний (РНС, РНС «Брас», РС-10, «Марс-75», ДЕКА, ЛОРАН, РСДН-6);
- пеленгов гирокомпасами «Курс», «Маяк» и магнитным компасом.

Зависимость дисперсии приращения навигационного параметра от времени и их автокорреляционной функции можно использовать для определения наилучших режимов измерений. Покажем это на примере определения скорости корабля (судна) по расстояниям до берегового ориентира. Пусть корабль движется по направлению на опорный пункт или от него, истинный пеленг на ориентир равен истинному курсу корабля, а измерения выполняются некоторой дальномерной системой. В зависимости от свойств РНС автокорреляционная функция ее погрешностей может быть представлена в видах:

$$r_{xx}(\Delta t) = e^{-\alpha \cdot \Delta t}, \quad (16)$$

$$r_{xx}(\Delta t) = e^{-\alpha \cdot \Delta t} \cdot \cos(\beta \cdot \Delta t), \quad (17)$$

где α , β – параметры автокорреляционной функции, имеющие размерность c^{-1} .

Скорость корабля в этом случае определяется по известной формуле [5], применив к которой прием логарифмического дифференцирования можно легко получить выражение для дисперсии определения скорости:

$$D_w = V^2 \cdot (D_{ll} / L^2 + D_{tt} / \Delta t^2) = D_{ll} / \Delta t^2 + V^2 \cdot D_{tt} / \Delta t^2, \quad (18)$$

где D_w – дисперсия определения скорости; D_{ll} – дисперсия определения длины отрезка пути корабля; D_{tt} – дисперсия измерения времени; V – скорость корабля; L – длина отрезка пути корабля; Δt – промежуток времени между измерениями расстояния.

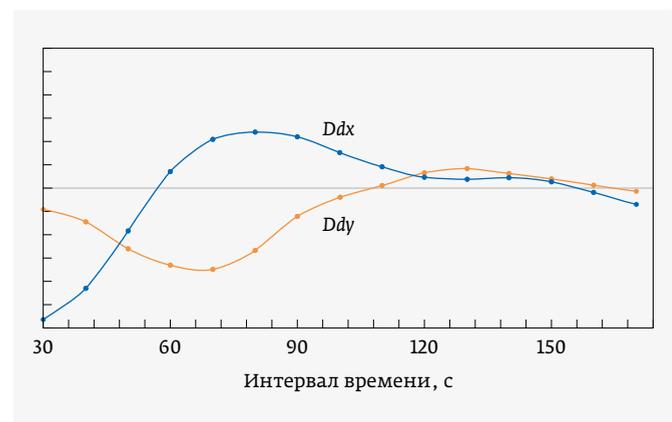


Рис. 1. Относительные разности расчетных и экспериментальных дисперсий

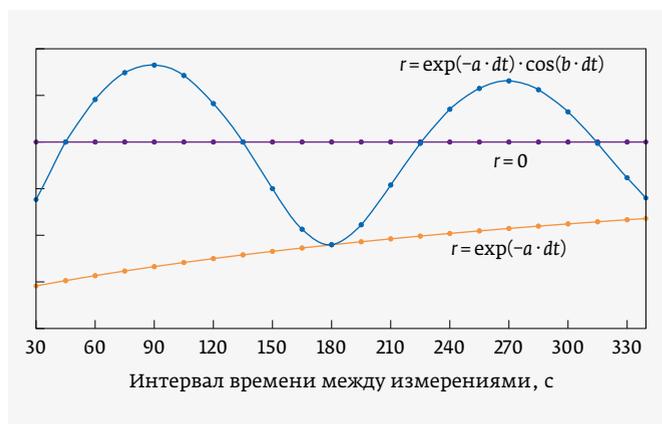


Рис. 2. Отношение оценок СКП определения скорости по коррелированным измерениям к оценке СКП определения скорости по независимым измерениям

Подставив в формулу (18) формулы (9), (16) и (17), получаем следующие выражения для дисперсий погрешностей определения скорости:

$$D_w = 2 \cdot D_{xx} \cdot (1 - e^{-\alpha \cdot \Delta t}) / \Delta t^2 + V^2 \cdot D_{tt} / \Delta t^2, \quad (19)$$

$$D_w = 2 \cdot D_{xx} \cdot (1 - e^{-\alpha \cdot \Delta t} \cdot \cos(\beta \cdot \Delta t)) / \Delta t^2 + V^2 \cdot D_{tt} / \Delta t^2. \quad (20)$$

На рис. 2 представлено отношение оценок СКП определения скорости по коррелированным измерениям к оценке СКП определения скорости по независимым измерениям. Условия проведения измерений соответствуют ст. 12 и 36 ПОМЭК-85.

Оценки дисперсий погрешностей рассчитаны для трех вариантов:

- для независимых погрешностей измерения расстояний [$r=0$] по формуле (18);
- для коррелированных однородных измерений с экспоненциальной автокорреляционной функцией [$r = \exp(-a \cdot dt)$] по формуле (19);
- для наблюдений с наиболее часто встречающейся автокорреляционной функцией [$r = \exp(-a \cdot dt) \cdot \cos(b \cdot dt)$] по формуле (20).

Из диаграммы на рис. 2 видно, что тип корреляционной функции измерителя расстояний и интервал между измерениями оказывают существенное влияние на точность

определения скорости корабля (судна), особенно если автокорреляционная функция погрешностей измерителя имеет периодический множитель. Правильный выбор интервала между измерениями позволяет уменьшить погрешности почти в 1,5 раза. И наоборот, ошибка в выборе интервала между измерениями может увеличить погрешности более чем на 30%.

Полученная формула дисперсии разности измерений позволяет иначе взглянуть и на приемы решения задач по определению места. Так же как и в предыдущем случае, покажем это на простейшем примере. Пусть место корабля определяется по трем измеренным с помощью РЛС дистанциям до береговых ориентиров. Измерения выполняются на одной и той же шкале, поэтому зависимость погрешности измерения от расстояния можно пренебречь, дисперсия погрешностей измерения расстояний в этом случае постоянна, и процесс измерения можно считать однородным. Пусть в результате измерений получен большой треугольник погрешностей. Если измерения выполнены за период времени существенно меньший интервала корреляции ($\Delta t < 48 \text{ с} = 8 \text{ мин} / 10$ [6]), когда коэффициент корреляции больше 0,8, для нахождения места корабля (судна) можно использовать широко применявшийся раньше прием, основанный на построении дополнительного треугольника погрешностей (рис. 3).

Отнимем от измеренных расстояний R_1, R_2, R_3 , прокладка которых привела к треугольнику погрешностей ABC , одну и ту же произвольную величину Δr . Проложим

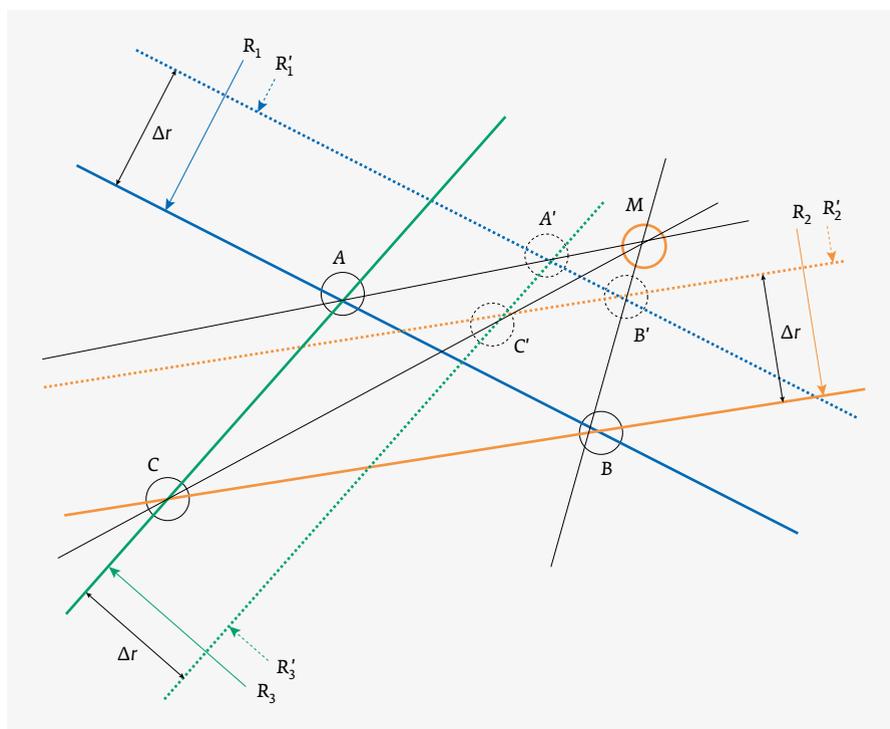


Рис. 3. Построение дополнительного треугольника погрешностей

полученные расстояния R_1' , R_2' , R_3' . Заметим, что как в вершинах исходного треугольника погрешностей ABC , так и в вершинах нового треугольника $A'B'C'$ соблюдены условия:

$$R_1 - R_2 = R_1' - R_2' = \Delta_1;$$

$$R_2 - R_3 = R_2' - R_3' = \Delta_2; R_3 - R_1 = R_3' - R_1' = \Delta_3.$$

То есть, отрезки AA' , BB' , CC' – это отрезки разностных линий положения. В рассматриваемом случае это разности расстояний Δ_1 , Δ_2 , Δ_3 . Область пересечения этих линий, обозначенная на рис. 3 буквой M , есть область, в которой находится вероятнейшее место корабля. В соответствии с условиями, оговоренными ранее, и формулой (9) погрешности разностного навигационного параметра существенно ниже погрешностей исходных измерений. Легко рассчитать, что СКП разностей расстояний $\sigma_{\Delta r}$ не превысит $0,63\sigma$ исходных измерений. Можно показать, что корреляция между погрешностями в величинах Δ_1 , Δ_2 , Δ_3 пренебрежимо мала, поэтому дальнейшие действия по определению места и оценке его точности можно выполнять по хорошо известным правилам и методикам для измерений с некоррелированными погрешностями.

Приведенный пример убедительно показывает, что формула расчета дисперсии разности однородных коррелированных измерений (9) позволяет определить допустимость использования способов решения навигационных задач с применением разностных навигационных параметров. В целом ряде случаев применение разностных линий положения, как показывает предлагаемая формула, обеспечивает более высокую точность результатов и существенное сокращение операций по решению навигационных задач. Например, вычисление вероятнейшего места по коррелированным измерениям в МВР-96 содержит более 25 расчетных шагов и анализ распределения линий положения по горизонту. Кроме того, он применим только для трех линий положения. Разностные линии положения приводят к конечному результату после обработки измерений обычным методом наименьших

квадратов и добавляют всего лишь N операций по определению разностных параметров, где N – число исходных измерений, которое должно быть не менее трех.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В статье теоретически обоснована и проверена экспериментально формула расчета дисперсии разности однородных коррелированных измерений при соблюдении условия равенства дисперсии и автокорреляционных функций для различных выборок измерений. Полученная зависимость позволяет обосновать режимы измерений, обеспечивающих существенное, почти в два раза, уменьшение погрешностей решения навигационных задач. Подход к обоснованию допустимости применения разностных линий положения на основании установления факта однородности погрешностей исходных измерений и оценки их корреляции позволяет определить условия, при которых можно применять упрощенные способы обработки навигационных измерений, повысить точность конечного результата и устранить повторяющуюся часть погрешностей.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Корн Г., Корн Т.** Справочник по математике для научных и инженерных работников. М.: Наука, 1984. 832 с.
2. **Двайт Г. Б.** Таблицы интегралов и другие математические формулы. М.: Наука, 1977. 224 с.
3. **Вентцель Е. С., Овчаров Л. А.** Теория случайных процессов и ее инженерные приложения. М.: Наука, 1991. 384 с.
4. **Вентцель Е. С.** Теория вероятностей. М.: Государственное издательство физико-математической литературы, 1962. 564 с.
5. Правила определения маневренных элементов кораблей военно-морского флота. (ПОМЭК-85). Л.: ГУНИО МО, 1987. 199 с.
6. Методика вероятностных расчетов, при решении навигационных задач на кораблях и судах ВМФ. (МВР-96). СПб: ГУНИО МО, 1999. 217 с.
7. Правила гидрографической службы № 5. Составление и издание морских карт и карт внутренних водных путей (ПГС № 5). Ч. 1. Л.: ГУНИО МО 1989, 351 с.

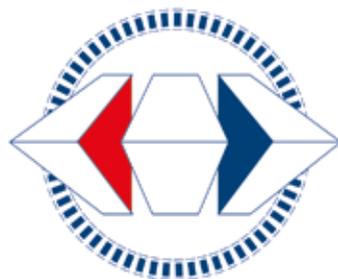
ЭЛЕКТРОНИКА НАНОИНДУСТРИЯ ФОТОНИКА ПЕРВАЯ МИЛЯ Аналитика СТАНКОИНСТРУМЕНТ

ИНФОПРОСТРАНСТВО
 ФЕССИОНАЛОВ

Мы на YouTube

Подписывайтесь

29 НОЯБРЯ – **1** ДЕКАБРЯ 2022



РОССИЙСКИЙ ПРОМЫШЛЕННИК

XXVI МЕЖДУНАРОДНЫЙ ФОРУМ

PROMEXPO.EXPOFORUM.RU

РАЗДЕЛЫ:

- МАШИНОСТРОЕНИЕ
- АВТОМАТИЗАЦИЯ
- СОВРЕМЕННЫЕ МАТЕРИАЛЫ
- МЕТАЛЛООБРАБОТКА, СТАНКОСТРОЕНИЕ
- ПРИБОРОСТРОЕНИЕ, ЭЛЕКТРОНИКА
- РЕГИОНЫ РОССИИ

КОНГРЕССНО-ВЫСТАВОЧНЫЙ ЦЕНТР
ЭКСПОФОРУМ
САНКТ-ПЕТЕРБУРГ, ПЕТЕРБУРГСКОЕ ШОССЕ, 64/1

ОРГАНИЗАТОР

EXPOFORUM

ГЕНЕРАЛЬНЫЙ
МЕДИАПАРТНЕР

САНКТ-ПЕТЕРБУРГ
ГЕНЕРАЛЬНЫЙ МЕДИАПАРТНЕР

12+